EPFL

A

Génie Mécanique, 5ème Semestre

EXAMEN MIDTERM – MÉCANIQUE VIBRATOIRE

AUTOMNE 2024-2025

DURÉE :1H30MIN

Instructions :

Ne pas retourner cette page avant d'y être autorisé

Avant l'examen

- Placez votre carte d'étudiant CAMIPRO devant vous sur la table.
- Les téléphones portables doivent être éteints et placés dans vos sacs.
- Préparez votre espace de travail. Matériel autorisé :
  - Stylos bleus et/ou noirs, **les stylos rouges et verts sont réservés pour la correction.**
  - Les crayons sont autorisés uniquement pour les dessins.
  - Une calculatrice est autorisée.

Pendant l'examen

- Écrivez et dessinez avec soin. Ce qui est illisible ne sera pas corrigé.
- Des feuilles de papier supplémentaires sont disponibles auprès des assistants.
  - Prenez soin de numéroter et d'indiquer votre nom sur toutes les feuilles de réponse.
- Levez la main si vous avez une question ou si vous souhaitez aller aux toilettes.
- Lors des 15 dernières minutes de l'examen, il est interdit de quitter la salle.
- Lorsque l'examen est terminé, **posez votre stylo**, et restez assis et silencieux jusqu'à ce que nous ayons ramassé TOUTES les copies.

Contenu de l'examen

- Question 1 – 20 points
  - *Page 1*
- Question 2 – 50 points
  - *Page 2*
- Question 3 – 30 points
  - *Page 3*

QUESTION 1 (20 points)

On considère un système comme montré dans la Figure 1.1, avec $c = 1.6\sqrt{km}$, et k, m connus. Les conditions initiales sont nulles $(x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0)$.
Si on applique une force $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$:

- **i) Calculer le mouvement $x(t)$ en régime permanent .... (5 pts)**
- **ii) À quelle valeur de ω trouve-t-on une amplitude maximale ? .... (5 pts)**

Si on applique une force $F(t) = 5F_0^* \delta(t)$, avec $\delta(t)$ la fonction impulsion de Dirac :

- **iii) Si $F(t) = 5F_0^* \delta(t)$, calculer le mouvement $x(t)$ en régime permanent. .... (2 pts)**
- **iv) Quelles sont les unités de F_0^* ? .... (2 pts)**
- **v) Calculer le mouvement $x(t)$ pour tout temps $(\forall t)$ .... (6 pts)**

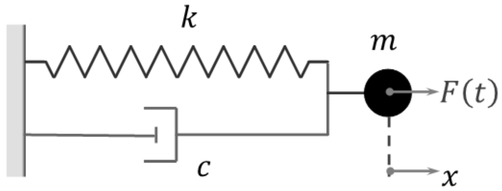

Figure 1.1 | Résonateur amorti.

Aide : Transformée de Laplace $(\mathcal{L})$:

$$\mathcal{L}(e^{at}\sin(bt)) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

Solutions

i) On prend la formule de la réponse permanente à une force harmonique :

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\mu(\omega)\cos(\omega t - \varphi)$$

Avec

$$\mu(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\eta^2\beta^2}}; \varphi = \arctan\left(\frac{2\eta\beta}{1-\beta^2}\right)$$

ii) Dans ce cas, $\eta = \frac{c}{2m\omega_0} = 0.8$, qui veut dire que le maximum de μ est à $\omega = 0$.

iii) Comme on a de la dissipation, après une impulsion initiale, le système va évoluer jusqu'à une amplitude nulle en régime permanent : $x(t) = 0$.

iv) Par définition de $\delta(t) \rightarrow \int \delta(t)\, dt = 1 \rightarrow [\delta(t)] = s^{-1}$. Si les unités de la δ sont celles-là, la composante $F_0^* \rightarrow [F_0^*] = N \cdot s$.

v) Pour calculer le mouvement pour tout le temps on fait la transformée de Laplace de l'équation du mouvement :

$$X(s)(ms^2 + cs + k) = F_0^* \rightarrow X(s) = \frac{5F_0^*}{m(s^2 + 2s\lambda + \omega_0^2)} = \frac{5F_0^*}{m((s+\lambda)^2 + \omega_1^2)}$$

$$x(t) = \frac{5F_0^*}{m\omega_1} e^{-\lambda t}\sin(\omega_1 t)$$

QUESTION 2 (50 points)

Le système de la Figure 2.1 se compose de deux tiges rigides de masse $6m$ et longueur L, attachées à un point qui permet la rotation à une extrémité et avec une masse m à l'autre extrémité. Les deux tiges sont reliées par un ressort de raideur k. Le système est soumis à une accélération gravitationnelle g vers le bas.

- **i) Combien de DdL a le système ?........(2 pts)**
- **ii) Ecrire les énergies potentielles et cinétiques du système........(18 pts)**
- **iii) Ecrire les équations de mouvement pour le système........(10 pts)**
- **iv) Calculer les vecteurs propres du système........(2 pts)**
- **v) Trouver des conditions initiales pour que le système bouge à ω_I........(2 pts)**
- **vi) Calculer les fréquences propres du système........(8 pts)**
- **vii) Trouver k pour que la deuxième fréquence soit le double de la première........(8 pts)**

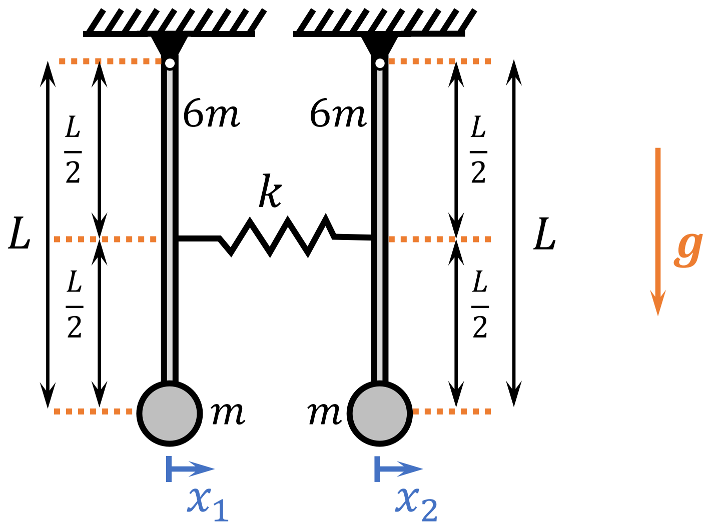

Figure 2.1 | Schéma du système.

Solutions

i) 2 DdL

ii)

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}6mL^2\right)\frac{\dot{x}_1^2}{L^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}6mL^2\right)\frac{\dot{x}_2^2}{L^2} = \frac{3}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$$

$$V = \left(mgL + 6mg\frac{L}{2}\right)(1-\cos(\theta_1)) + \left(mgL + 6mg\frac{L}{2}\right)(1-\cos(\theta_2)) + \frac{1}{2}k\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 =$$

$$= 2m\frac{g}{L}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{8}k(x_1 - x_2)^2$$

iii)

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right\} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 3m\ddot{x}_1 + 4m\frac{g}{L}x_1 + \frac{k}{4}(x_1 - x_2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right\} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 3m\ddot{x}_2 + 4m\frac{g}{L}x_2 + \frac{k}{4}(x_2 - x_1) = 0$$

iv) Comme le système est symétrique, les vecteurs propres seront :

$$\vec{\beta}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \vec{\beta}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

v) Si on a des conditions initiales proportionnelles à $\vec{\beta}_I$, on aura un mouvement à ω_I. Par exemple, $\vec{x}(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ cm.

vi) Comme on a dit, le système est symétrique. Pour le premier mode, le ressort ne sera ni en compression ni en extension, ça veut dire que la fréquence sera :

$$\omega_I^2 = \frac{4m\frac{g}{L}}{3m} = \frac{4}{3}\frac{g}{L}$$

Pour le deuxième mode, on peut voir que la contribution de la raideur sera multipliée par 2 :

$$\omega_{II}^2 = \frac{4m\frac{g}{L} + 2\frac{k}{4}}{3m} = \frac{4}{3}\frac{g}{L} + \frac{1}{6}\frac{k}{m}$$

vii)

$$\omega_{II}^2 = 4\omega_I^2 \rightarrow \frac{4}{3}\frac{g}{L} + \frac{1}{6}\frac{k}{m} = 4\frac{4}{3}\frac{g}{L} \rightarrow k = 24\frac{g}{L}m$$

QUESTION 3 (30 points)

On a une table rigide de masse m_{table} qui bouge de manière verticale ($y(t)$). Un système avec un ressort, un amortisseur, et une masse est relié à la table, comme montré dans le schéma de la Figure 3.1. L'amortissement relatif est $\eta^2 = \frac{5}{32}$, et le mouvement de la table est donné par :

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t)\,(1 + \cos(\omega t))$$

- **i) Combien de DdL a le système ?..........(2 pt)**
- **ii) Ecrire l'équation du mouvement vertical de la masse m, $x(t)$..........(4 pts)**
- **iii) Combien de termes harmoniques trouve-t-on dans le mouvement $x(t)$?..........(2 pt)**
- **iv) Ecrire chaque terme en fonction de y_0, β, η...........(10 pts)**
- **v) Pour quelles valeurs de ω (en fonction des paramètres du système) trouve-t-on la valeur maximale pour chaque terme ?..........(12 pts)**

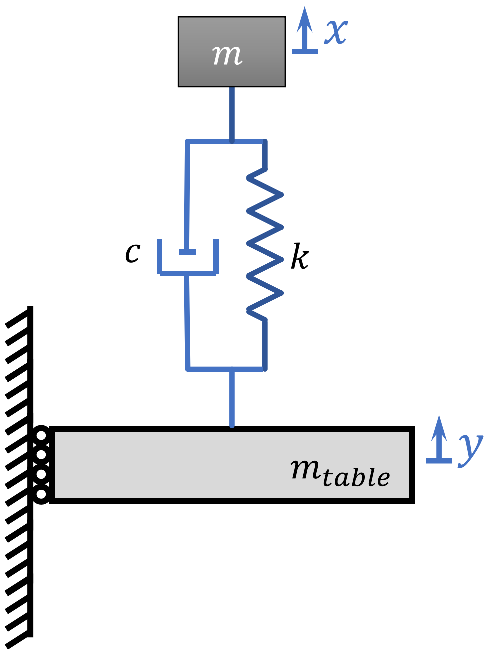

Figure 3.1 | Schéma du système avec une masse m tel que $c < 2\sqrt{km}$.

Aide :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\alpha x}{(1-x)^2 + \alpha x}\right) = \frac{2 - 2x - x^2\alpha}{((1-x)^2 + \alpha x)^2}$$

Solutions

i) 1 DdL (ou 2 DdL si on considère $y(t)$).

ii)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$

iii) Le mouvement de la table est donné par : $y(t) = \frac{y_0}{2} + y_0\cos(\omega t) + \frac{y_0}{2}\cos(2\omega t)$, alors on aura 2 termes harmoniques.

iv) Pour chaque terme harmonique on peut résoudre en utilisant la notation complexe pour le mouvement de la table. Ça nous donne un mouvement du type :

$$\omega \to \tilde{x}_1(t) = y_0 \frac{1 + j2\eta\beta}{1 - \beta^2 + j2\eta\beta} e^{j\omega t}$$
$$2\omega \to \tilde{x}_2(t) = \frac{y_0}{2} \frac{1 + j4\eta\beta}{1 - 4\beta^2 + j4\eta\beta} e^{j2\omega t}$$

v) Quand on met ça en coordonnées réelles :

$$\omega \to x_1(t) = y_0 \sqrt{\frac{1 + (2\eta\beta)^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\eta\beta)^2}} \cos(\omega t - \varphi_1) \, ; \varphi_1 = \arg\left(\frac{1 + j2\eta\beta}{1 - \beta^2 + j2\eta\beta}\right)$$
$$2\omega \to \tilde{x}_2(t) = \frac{y_0}{2} \sqrt{\frac{1 + (4\eta\beta)^2}{(1-4\beta^2)^2 + (4\eta\beta)^2}} \cos(2\omega t - \varphi_2) \, ; \varphi_2 = \arg\left(\frac{1 + j4\eta\beta}{1 - 4\beta^2 + j4\eta\beta}\right)$$

vi) On maximise la fonction pour le premier harmonique. Pourfaire ça on va dériver le module au carré, pour utiliser l'aide que l'on a dans l'énoncé :

$$\frac{d}{d\beta^2}\left(\frac{1 + (2\eta\beta)^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\eta\beta)^2}\right) = 0 \to 2 - 2\beta^2 - 4\eta^2\beta^4 = 0$$
$$\beta^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8\eta^2}}{4\eta^2} = \begin{Bmatrix} \frac{4}{5} \\ \\ -8 \end{Bmatrix} \to \beta^2_{maximum,1} = \frac{4}{5}$$

Pour le deuxième harmonique, la solution est la même mais à la moitié de la fréquence

$$\beta^2_{maximum,2} = \frac{1}{5}$$